# תורת הקבוצות, תרגיל 8

1. הוכח את כללי החזקה הבאים:

א. $a^1 = a$.

ב. $a^{b+c} = a^b a^c$.

ג. $(a^b)^c = a^{bc}$.

ד. אם $a \leq b$ אז $a^c \leq b^c$.

2. א. מהי עוצמת קבוצת כל הסדרות האינסופיות של מספרים ממשיים?

ב. מהי עוצמת קבוצת כל הסדרות הסופיות של המספרים הממשיים?

אם הנך משתמש בתשובתך לחלק א' עשה זאת בזהירות.

ג. תהי $S$ קבוצת הפונקציות $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ הרציפות לכל $x$ פרט לקבוצה סופית של נקודות. מהי עוצמת $S$?

3. נגדיר $\beth_2 = 2^{(2^{\aleph_0})}$.

א. הוכח, כי $\beth_2 = \beth_2 + \beth_2$.

ב. הוכח, כי $\beth_2 = \beth_2 \times \beth_2$.

ג. הוכח, כי $2^{\beth_2} = \beth_2^{\beth_2}$.

ד. חשב את $\beth_2^{(2^{\aleph_0})}$.

4. הוכח את הטענה הבאה: תהי $A$ קבוצה סופית של קבוצות. אזי קיימת פונקציה $f$ שתחומה $A$ כך שלכל $S \in A$ מתקיים $f(S) \in S$.

הערה: טענה זו היא "המקרה הסופי" של אקסיומת הבחירה. כפי שניתן לראות, במקרה הסופי זו לא אקסיומה אלא משפט הנובע מהאקסיומות האחרות.

5. הוכח את שקילות הטענות א'-ג' הבאות.

א. אקסיומת הבחירה: לכל קבוצה $W$ של קבוצות לא ריקות קיימת פונקציה $F$ שתחומה $W$ כך שלכל $X \in W$ $F(X) \in X$.

ב. לכל פונקציה $G$ שכל ערכיה קבוצות לא ריקות קיימת פונקציה $F$ שתחומה כתחום $G$ כך שלכל $x$ בתחומן $F(x) \in G(x)$.

ג. לכל קבוצה $W$ של קבוצות לא ריקות זרות הדדית קיימת קבוצה $A$ כך שלכל $X \in W$ יש בדיוק איבר משותף אחד עם $A$.

תאריך ההגשה: 15.12.2004